LEERBOEK DER VLAKKE DRIEHOEKSMETING

8

DOOR

P. VISSER

LERAAR AAN DE 3e H. B. S. MET 5-J. C. TE 'S-GRAVENHAGE

I

DE GONIOMETRIE VAN DE ENKELE HOEK

(MET TOEPASSING OP DE DRIEHOEK)

VIJFDE DRUK

J. B. WOLTERS

DEN HAAG — BATAVIA — 1934

LEERBOEK DER VLAKKE DRIEHOEKSMETING

DOOR

P. VISSER
LERAAR AAN DE 3e H. B. S.
MET 5-J. C. TE 'S-GRAVENHAGE

I

DE GONIOMETRIE VAN DE ENKELE HOEK

(MET TOEPASSING OP DE DRIEHOEK)

VIJFDE DRUK

f 0,70
2 delen geb. in één band f 2,25

BIJ J. B. WOLTERS' UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ N. V.
GRONINGEN — DEN HAAG — BATAVIA — 1934

BOEKDRUKKERIJ VAN J. B. WOLTERS

VOORBERICHT.

Het eerste deeltje van dit leerboek der vlakke driehoeksmeting bevat de leerstof van de 3de klasse H. B. S. Bovendien zijn, in de vorm van herhalingsvraagstukken, de sinusregel en de cosinusregel opgenomen. Nu een aantal leerlingen der 3de klasse, door overgang naar de litterair-economische afdeling, slechts een gedeelte van de driehoeksmeting bestudeert, lijkt het mij wenselijk, door toevoeging van deze beide fundamentele regels, dit gedeelte tot een afgerond geheel te maken. Maar ook voor de andere leerlingen, die in de 4de klasse, bij het onderwijs in de mechanica, zeer spoedig voor het gebruik van deze regels geplaatst worden, is het noodzakelijk dat deze onderwerpen reeds in de 3de klasse worden ingeleid.

Voor opmerkingen van collega's houd ik mij ten zeerste aanbevolen.

DEN HAAG, Maart 1934. P. VISSER.

INHOUD.

INLEIDING.

§ 1. In de planimetrie leren we, met behulp van de stelling van Pythagoras, de lengte van lijnen uitrekenen als van andere lijnen de lengte gegeven is. Die stelling wordt gewoonlijk uitgebreid tot de z.g.n. projectiestelling, waardoor we in staat gesteld worden verschillende merkwaardige lijnen van een driehoek — hoogtelijnen, zwaartelijnen, bisectrices, stralen van om-, in- en aangeschreven cirkels — te berekenen, als de zijden gegeven zijn.

Komen echter onder de gegevens hoeken voor, dan zal de planimetrie voor de berekening der lengte van onbekende lijnen in de regel te kort schieten.

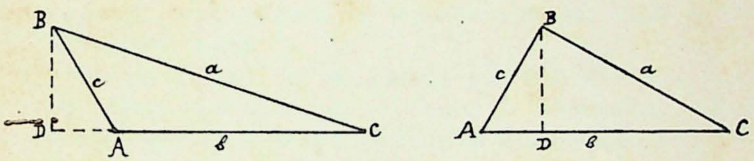

Fig. 1.

Vraagt men b.v. de zijde a van $\triangle$ ABC te berekenen als gegeven zijn: b, c en $\angle$ A, dan leert de projectiestelling:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b \times \mathrm{AD}.$$

De zijden b en c zijn gegeven, zodat alleen AD berekend moet worden. Dit laatste kan nu met planimetrische hulpmiddelen slechts in zeer bijzondere gevallen geschieden, n.l. als $\angle$ BAD of $\angle$ ABD de helft is van de middelpuntshoek, die behoort bij een zijde of een diagonaal van een der regelmatige veelhoeken, die in de planimetrie behandeld worden. Hier volgen enige voorbeelden:

Is $\angle$ A $= 30°$, dan is AD $= \frac{1}{2}\, c\, \sqrt{3}$.

„ $\angle$ A $= 45°$, „ „ AD $= \frac{1}{2}\, c\, \sqrt{2}$.

„ $\angle$ A $= 60°$, „ „ AD $= \frac{1}{2}\, c$.

Is $\angle A = 72°$, dan is $AD = \frac{1}{4} c\,(-1 + \sqrt{5})$.
Is $\angle A = 126°$ en dus $\angle ABD = 36°$, dan is $AD = \frac{1}{4} c \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Is $\angle A = 162°$ en dus $\angle ABD = 72°$, dan is $AD = \frac{1}{4} c \sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
Voor een willekeurige waarde van $\angle A$, b.v. 50°, is de berekening echter op deze wijze niet uitvoerbaar.

Het te kort schieten van de planimetrie valt nog meer op, wanneer men uit de lengte van lijnen de grootte van hoeken wil berekenen. Weet men b.v. dat de zijden van een driehoek 5, 6 en 7 cm zijn, dan is de constructie van de hoeken een zeer eenvoudig vraagstuk, maar de berekening van de aantallen graden is al weer onuitvoerbaar. Toch komen zulke vraagstukken in andere takken der wetenschap en ook in het practische leven herhaaldelijk voor (sterrenkunde, zeevaartkunde, landmeten), zodat het deel van de wiskunde, dat zich met de oplossing er van bezighoudt, al zeer oud is.

DE GONIOMETRISCHE VERHOUDINGEN VAN DE SCHERPE HOEK.

§ 2. De oplossing van de in § 1 bedoelde vraagstukken is gevonden door, naast de wijze van hoekmeten met behulp van graden, minuten en seconden, een andere manier — door middel van verhoudingen van rechten — te volgen. De tak van de wiskunde, die zich hiermee bezighoudt heet **goniometrie** en de bedoelde verhoudingen **goniometrische verhoudingen.**

We kunnen een hoek ontstaan denken door uit te gaan van twee, aan één zijde begrensde, rechten, die het eindpunt gemeen hebben en geheel samenvallen. Aan één van deze rechten geven we een vaste stand, terwijl de andere om het gemeenschappelijke eindpunt gedraaid wordt. De benen van de, op die wijze gevormde hoek, noemen we respectievelijk het **vaste** en het **beweeglijke been.**

Voorloopig zullen we de draaiing van het beweeglijke been niet verder laten gaan dan 90°, zodat in dit hoofdstuk alleen scherpe hoeken beschouwd worden. De grensgevallen 0° en 90° worden afzonderlijk behandeld.

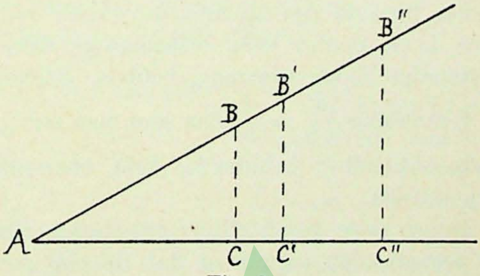

Fig. 2.

Op het beweeglijke been van ∠ A nemen we enige punten B, B', B'', enz. aan. De rechten AB, AB', AB'', enz. noemen we **aangenomen stukken.** Uit deze punten laten we loodlijnen

BC, B′C′, B″C″, enz. op het vaste been neer, die we **projecterende lijnen** noemen. Ten slotte geven we aan de rechten AC, AC′, AC″, enz. de naam van **projecties.**

Op die wijze ontstaan enige gelijkvormige driehoeken (H.H.), waaruit zes aaneengeschakelde evenredigheden afgeleid kunnen worden:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \text{enz.}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC''}{AB''} = \text{enz.}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = \text{enz.}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{B'C'} = \frac{AC''}{B''C''} = \text{enz.}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC''} = \text{enz.}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C''} = \text{enz.}$$

Bij een bepaalde hoek behoren dus zes verhoudingen van twee rechten, die in 't algemeen verschillende waarden hebben. (Welke verhoudingen kunnen gelijk zijn?) Verder is gebleken, dat de waarden van deze verhoudingen onafhankelijk zijn van de plaats der punten B en dus uitsluitend bepaald worden door de grootte van de hoek. Maar ook omgekeerd zal een scherpe hoek volkomen bepaald zijn als men de waarde van een dezer verhoudingen kent, omdat twee rechthoekige driehoeken, die twee gelijkstandige zijden evenredig hebben, gelijkvormig zijn. Is b.v. de verhouding $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$, dan kan men zeer gemakkelijk de, bij deze verhouding behorende, hoek construeren. (Voer deze constructie uit).

Wanneer tussen twee veranderlijke grootheden een dergelijke samenhang bestaat, dan zegt men dat de ene grootheid een functie is van de andere grootheid. De bovengenoemde goniometrische verhoudingen worden daarom ook **goniometrische functies** genoemd. De waarden van deze functies, voor bepaalde waarden van de hoek, zijn verhoudingen van lijnen en dus *onbenoemde getallen.*

§ 3.

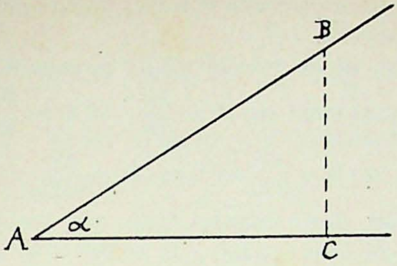

Fig. 3.

De namen en definities der goniometrische verhoudingen zijn:

de *sinus* van een hoek $= \dfrac{\text{projecterende lijn}}{\text{aangenomen stuk}}$; afkorting: $sin\ \alpha = \dfrac{BC}{AB}$.

„ *cosinus* „ „ „ $= \dfrac{\text{projectie}}{\text{aangenomen stuk}}$; „ : $cos\ \alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

„ *tangens* „ „ „ $= \dfrac{\text{projecterende lijn}}{\text{projectie}}$; „ : $tg\ \alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

„ *cotangens* „ „ „ $= \dfrac{\text{projectie}}{\text{projecterende lijn}}$; „ : $cotg\ \alpha = \dfrac{AC}{BC}$.

„ *secans* „ „ „ $= \dfrac{\text{aangenomen stuk}}{\text{projectie}}$; „ : $sec\ \alpha = \dfrac{AB}{AC}$.

„ *cosecans* „ „ „ $= \dfrac{\text{aangenomen stuk}}{\text{projecterende lijn}}$; „ : $cosec\ \alpha = \dfrac{AB}{BC}$.

Zo lang we met scherpe hoeken werken is het eenvoudiger de volgende benamingen te gebruiken:

de *sinus* van een hoek $= \dfrac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}}$.

„ *cosinus* „ „ „ $= \dfrac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}}$.

„ *tangens* „ „ „ $= \dfrac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$.

„ *cotangens* „ „ „ $= \dfrac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$.

„ *secans* „ „ „ $= \dfrac{\text{hypotenusa}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$.

„ *cosecans* „ „ „ $= \dfrac{\text{hypotenusa}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$.

Bij hoeken, die groter zijn dan 90°, hebben deze benamingen echter geen betekenis.

Past men de, in de tweede plaats genoemde, definities toe op $\angle$ B, dan vindt men: $\sin B = \frac{AC}{AB}$, $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $tg\, B = \frac{AC}{BC}$,

$\cot g\, B = \frac{BC}{AC}$, $\sec B = \frac{AB}{BC}$ en $\operatorname{cosec} B = \frac{AB}{AC}$.

Vergelijkt men deze waarden met wat we boven vonden voor α, dan komt men, omdat $\angle B = 90° - \alpha$, tot de volgende belangrijke formules:

$$\begin{aligned}
\sin\ (90° - \alpha) &= \cos\ \alpha. \\
\cos\ (90° - \alpha) &= \sin\ \alpha. \\
tg\ (90° - \alpha) &= \cot g\ \alpha. \\
\cot g\ (90° - \alpha) &= tg\ \alpha. \\
\sec\ (90° - \alpha) &= \operatorname{cosec}\ \alpha. \\
\operatorname{cosec}\ (90° - \alpha) &= \sec\ \alpha.
\end{aligned}$$

§ 4. Er is reeds opgemerkt, dat een scherpe hoek volkomen bepaald is, als men *één* der goniometrische verhoudingen kent. Uit het volgende voorbeeld zal blijken, hoe men, als een der goniometrische verhoudingen gegeven is, de vijf andere kan berekenen.

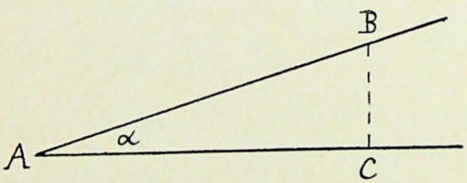

Fig. 4.

Gegeven: $\sin \alpha = 0{,}3$.

Gevraagd: $\cos \alpha$, $tg\ \alpha$, $\cot g\ \alpha$, $\sec \alpha$ en $\operatorname{cosec} \alpha$.

Berekening: Laat uit een willekeurig punt B van het ene been van $\angle$ A een loodlijn neer op het andere been. Volgens het gegevene is nu $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{10}$. Neemt men dus het derde gedeelte van BC als lengte-eenheid aan, dan is $BC = 3$, $AB = 10$ en $AC = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}$ van die lengte-eenheden. We lezen nu rechtstreeks uit de figuur af:

$\cos\ \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10} = 0{,}95$, $tg\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{3}{91}\ \sqrt{91} = 0{,}31$,

$cotg\ \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3} = 3{,}18$, $sec\ \alpha = \frac{10}{\sqrt{91}} = \frac{10}{91}\ \sqrt{91} = 1{,}05$, en

$cosec\ \alpha = \frac{10}{3} = 3{,}33$, waarbij alle antwoorden nauwkeurig zijn tot op $\frac{1}{2}$ honderdste.

§ 5. Opgaven.

1. Construeer α als gegeven is: *a*) $sin\ \alpha = \frac{4}{7}$; *b*) $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$; *c*) $tg\ \alpha = 1\frac{1}{3}$; *d*) $cotg\ \alpha = 0{,}4$; *e*) $sec\ \alpha = 2{,}5$; *f*) $cosec\ \alpha = 1{,}4$.
2. Bereken van de in no. 1 geconstrueerde hoeken de vijf andere goniometrische verhoudingen.
3. De volgende opgaven hebben betrekking op een driehoek ABC, waarvan $\angle$ C = 90°.
   a) Gegeven: BC = 5, AC = 12. Gevraagd: *tg* A, *sin* A en *sec* B.
   b) „ : BC = 4, AB = 5. „ : *cos* A, *tg* B en *cosec* B.
   c) „ : AB = 5, *sin* A = $\frac{2}{3}$. „ : AC en BC.
   d) „ : BC = 6, *sec* A = 3. „ : AB en AC.
   e) „ : AC = 5, *cos* B = $\frac{2}{7}$. „ : AB en BC.
4. Construeer α, als gegeven is:
   a) $sin\ \alpha = \frac{p}{q}$; *b*) $tg\ \alpha = \frac{ab}{cd}$; *c*) $cosec\ \alpha = \frac{2a^2 - b^2}{b^2}$;
   d) $cotg\ \alpha = \sqrt{5}$; *e*) $cos\ \alpha = \frac{1}{3}\ \sqrt{7}$.
   (De letters achter de = tekens stellen gegeven rechten voor).
5. Welke goniometrische verhoudingen kunnen voorgesteld worden door $\frac{p}{q}$, als: *a*) $p < q$; *b*) $p > q$?
   Wat volgt hieruit voor de waarden der goniometrische verhoudingen van een scherpe hoek?
6. *a*) Gegeven: $tg\ \alpha = p$. Gevraagd: $sin\ \alpha$ en $sec\ \alpha$.
   b) „ : $sin\ \alpha = q$. „ : $cotg\ \alpha$ en $cos\ \alpha$.
7. Bereken alle goniometrische verhoudingen van een hoek van: *a*) 30°; *b*) 45°; *c*) 60°.
8. De volgende opgaven hebben betrekking op een driehoek ABC, waarvan $\angle$ C = 90°.

a) **Gegeven: AB = c, ∠ A = α. Gevraagd: BC en AC.** Druk de antwoorden in woorden uit en memoriseer ze.

b) Gegeven: AC = b, ∠ A = α. Gevraagd: AB en BC.

c) „ : BC = a, ∠ A = α. „ : AB en AC.

9. In △ ABC van no. 8 trekt men de hoogtelijn op de hypotenusa.

Druk de lengte van die lijn uit in:

a) a en α; *b*) b en α; *c*) c en α.

10. Van een rechthoekig trapezium staat de kleinste diagonaal loodrecht op de schuine zijde. De langste der evenwijdige zijden is a en de hoek, die deze met de schuine zijde maakt is α. Druk in deze gegevens de andere zijden en de beide diagonalen uit.

11. Van een rechthoekig trapezium staan de diagonalen loodrecht op elkaar. De langste der evenwijdige zijden is a en de hoek, die deze met de langste diagonaal maakt is α. Druk in deze gegevens de andere zijden en de diagonalen uit.

12. De volgende opgaven hebben betrekking op scherphoekige driehoeken.

a) Gegeven: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Gevraagd: $\sin$ A.

b) „ : $a = 25$, $b = 17$, $\cot g\,\mathrm{A} = \frac{8}{15}$. „ : c.

c) „ : $a = 5$, $b = 7$, $\cos\mathrm{C} = \frac{19}{35}$. „ : c.

d) „ : $b = 13$, $\sin\mathrm{A} = \frac{12}{13}$, $\sin\mathrm{B} = \frac{3}{5}$. „ : a en c.

e) „ : $a = 14$, $\sin\mathrm{B} = \frac{12}{13}$, $\sin\mathrm{C} = \frac{4}{5}$. „ : b en c.

13. Als a, b en c gegeven lijnen en α en β gegeven hoeken zijn, construeer dan de lijnen:

a) $a \sin\alpha$; *b*) $\dfrac{ab\cos\alpha}{c\sin\beta}$; *c*) $a\cos^2\alpha$;

d) $\dfrac{ab\sin\alpha\cos\beta}{c\,tg\,\beta}$.

HET GEBRUIK VAN DE TAFELS.

§ 6. Met behulp van de ontwikkelde begrippen zullen we nu een der vragen, die in de planimetrie onbeantwoord zijn gebleven, nader onderzoeken.

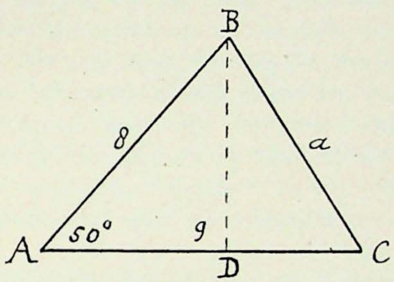

Fig. 5.

G e g e v e n: $\triangle$ ABC. AB = 8, AC = 9, $\angle$ A = 50°.

G e v r a a g d: BC.

B e r e k e n i n g: Volgens de projectiestelling is:

$$a^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \times 9 \times AD$$

of: $$a^2 = 145 - 18\ AD.$$

In $\triangle$ ABD is: $\cos A = \frac{AD}{AB}$, of $\cos 50° = \frac{AD}{8}$, dus: $AD = 8 \cos 50°$.

Dus: $a^2 = 145 - 18 \times 8 \cos 50° = 145 - 144 \cos 50°$, waaruit volgt: $a = \sqrt{145 - 144 \cos 50°}$.

Hiermee is nu wel een antwoord gevonden, waarin uitsluitend getallen en enige bekende tekens voorkomen, maar het is onze bedoeling een, zij het dan ook benaderde, waarde van *a* te vinden in de vorm van één getal. Daarvoor is het nodig de waarde van *cos* 50° te weten.

Men heeft de waarden der sinussen en tangenten in tafels verenigd, die **sinustafel** en **tangenstafel** heten. Tafels van de waarden der andere goniometrische verhoudingen heeft men niet nodig, want uit $\cos\ \alpha = \sin\ (90° - \alpha)$ en $\text{cotg}\ \alpha =$

$tg\ (90° - \alpha)$ volgt, dat de sinussen van de hoeken van 0° tot 90° in getallenwaarde gelijk zijn aan de cosinussen van de hoeken van 90° tot 0°, terwijl hetzelfde voor de tangenten en cotangenten geldt. Verder worden de secans en de cosecans bij het maken van berekeningen met getallen niet gebruikt, omdat uit de bepalingen van § 3 onmiddellijk volgt: $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ en $cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha}$.

De tafels zijn, door een z.g.n. dubbele ingang, zó ingericht, dat men toch de cosinus en de cotangens rechtstreeks kan aflezen, zonder eerst de gegeven hoek van 90° af te trekken. Bij het merendeel der tafels zijn de sinustafel en de tangenstafel in twee delen gesplitst, die naast elkaar zijn geplaatst en waarvan het eerste deel de hoeken van 0° tot 45° en het tweede die van 90° tot 45° behandelt. Daardoor komen de vier goniometrische verhoudingen van elke hoek tussen 0° en 90° naast elkaar te staan.

In zo'n tafel vindt men nu cos 50° = 0,6428 of, als men een tafel in 5 decimalen gebruikt, 0,64279.

De boven uitgerekende waarde van de onbekende zijde wordt nu:
$a = \sqrt{145 - 144 \times 0{,}6428} = \sqrt{145 - 92{,}58} = \sqrt{52{,}42} = 7{,}2$.
Het product 144 × 0,6428 of 144 cos 50° is hier uitgerekend met behulp van een log. tafel. Bij het uitvoeren van berekeningen hebben we dus dikwijls meer behoefte aan de waarden van de logarithmen der goniometrische verhoudingen, dan aan de waarden van die verhoudingen zelf. Daarom heeft men ook een **log. sin. tafel** en een **log. tg. tafel** gemaakt.

Omdat alle sinussen en cosinussen en ook de tangenten van hoeken < 45° en de cotangenten van hoeken > 45° echte breuken zijn, zullen alle getallen van de log. sin. tafel en de helft van de getallen van de log. tg. tafel negatief zijn, en dus van de gedaante 0, ... — 1, 0, ... — 2, enz. Het vermelden van deze *verschillende* negatieve wijzers zou de tafel onduidelijk maken. Nu is 0, ... — 1 = 9, ... — 10, 0, ... — 2 = 8, ... — 10, enz. De tafels zijn daarom zó ingericht, dat van *alle* logarithmen 10 afgetrokken moet worden.

In overeenstemming met het gebruik van de log. tafels voor getallen volgt men, ter bepaling van de logarithmen die niet rechtstreeks zijn af te lezen, een benaderingsmethode, waarbij wordt aangenomen dat, in een klein interval, de veranderingen der logarithmen evenredig zijn met die der hoeken. Men noemt dit **interpoleren.** Op dezelfde wijze gebruikt men de tafels der rechtstreekse waarden.

Een uitvoeriger verklaring wordt, met het oog op de vele verschillen die er tussen de in gebruik zijnde tafels bestaan, achterwege gelaten.

§ 7. Bij het uitvoeren van berekeningen moet men er steeds naar streven de gevraagde elementen rechtstreeks in de gegevens uit te drukken. Het is wenselijk hierbij de lijnen en hoeken door kleine letters voor te stellen en alleen het antwoord, dat uitgerekend moet worden, in getallenwaarde neer te schrijven. Eerst daarna gaat men tot het gebruik van tafels over.

Voorbeeld.

Van een rechthoekige driehoek is een rechthoekszijde = 12 en de aanliggende hoek 53°48′19″. Gevraagd: de projectie van de andere rechthoekszijde op de hypotenusa.

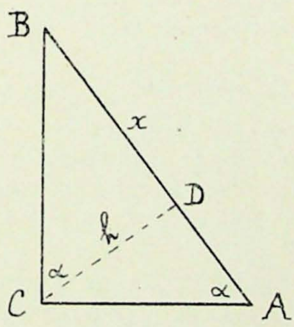

Fig. 6.

Gegeven: $\angle ACB = 90°$, $AC = 12$, $\angle A = 53°48'19''$, $CD \perp AB$.
Gevraagd: BD.

Berekening: Uit $\triangle$ ADC volgt: $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, dus $h = b \sin \alpha$

In $\triangle$ BCD is $\angle$ BCD $= \alpha$, dus $tg\ \alpha = \frac{x}{h}$ of: $x = h\ tg\ \alpha$.

Men heeft nu: $x = b \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$, zodat:

$$BD = 12 \sin 53°48'19'' \operatorname{tg} 53°48'19''$$

a) Berekening in 4 dec. en zonder seconden:

$$\begin{aligned} \log 12 &= 1{,}0792 \\ \log \sin 53°48' &= 9{,}9068 - 10 \\ \log \operatorname{tg} 53°48' &= 10{,}1356 - 10 \\ \hline \log BD &= 1{,}1216 \\ BD &= 13{,}23. \end{aligned}$$

b) Berekening in 5 decimalen:

$$\begin{aligned} \log 12 &= 1{,}07918 \\ \log \sin 53°48'19'' &= 9{,}90688 - 10 \\ \log \operatorname{tg} 53°48'19'' &= 10{,}13564 - 10 \\ \hline \log BD &= 1{,}12170 \\ BD &= 13{,}234. \end{aligned}$$

§ 8. Opgaven.

1. Bepaal, door gebruik te maken van een tafel der rechtstreekse waarden:
   sin 17°, *cos* 25°10′, *tg* 36°40′, *cotg* 42°20′, *sin* 65°30′, *cos* 72°50′, *tg* 59°, *cotg* 69°40′.
2. Ook:
   sin 23°17′15″, *cos* 42°37′29″, *tg* 12°51′54″, *cotg* 31°19′27″, *sin* 65°42′23″, *cos* 78°13′8″, *tg* 54°6′34″, *cotg* 60°53′16″.
3. Bepaal, door gebruik te maken van een log. tafel:
   log sin 37°, *log cos* 16°20′, *log tg* 8°40′, *log cotg* 42°50′, *log sin* 69°40′, *log cos* 52°10′, *log tg* 73°, *log cotg* 49°30′.
4. Ook:
   log sin 14°23′, *log cos* 37°12′, *log tg* 40°52′, *log cotg* 19°27′, *log sin* 71°16′, *log cos* 57°8′, *log tg* 80°56′, *log cotg* 61°11′.
5. Ook:
   log sin 37°51′23″, *log cos* 43°2′37″, *log tg* 39°48′15″, *log cotg* 29°17′52″, *log sin* 50°13′44″, *log cos* 62°5′3″, *log tg* 46°39′28″, *log cotg* 78°47″.
6. Bepaal, door gebruik te maken van een tafel der rechtstreekse waarden, de scherpe hoeken x uit de volgende gegevens:

$\sin x = 0{,}41204$, $\cos x = 0{,}77531$, $\operatorname{tg} x = 0{,}99120$, $\operatorname{cotg} x = 1{,}79174$, $\sin x = 0{,}92164$, $\cos x = 0{,}66044$, $\operatorname{tg} x = 2{,}19430$, $\operatorname{cotg} x = 0{,}80020$.

7. Ook:
$\sin x = 0{,}41856$, $\cos x = 0{,}73192$, $\operatorname{tg} x = 0{,}84227$, $\operatorname{cotg} x = 1{,}34828$, $\sin x = 0{,}84704$, $\cos x = 0{,}30862$, $\operatorname{tg} x = 3{,}78219$, $\operatorname{cotg} x = 0{,}74154$.

8. Bepaal, door gebruik te maken van een log tafel, de scherpe hoeken x uit de volgende gegevens:
$\log \sin x = 9{,}67633 - 10$, $\log \cos x = 9{,}95242 - 10$,
$\log \operatorname{tg} x = 9{,}81803 - 10$, $\log \operatorname{cotg} x = 10{,}61411 - 10$,
$\log \sin x = 9{,}87334 - 10$, $\log \cos x = 9{,}58284 - 10$,
$\log \operatorname{tg} x = 10{,}21552 - 10$, $\log \operatorname{cotg} x = 9{,}91353 - 10$.

9. Ook:
$\log \sin x = 9{,}71506 - 10$, $\log \cos x = 9{,}86229 - 10$,
$\log \operatorname{tg} x = 9{,}73198 - 10$, $\log \operatorname{cotg} x = 10{,}56413 - 10$,
$\log \sin x = 9{,}94130 - 10$, $\log \cos x = 9{,}80142 - 10$,
$\log \operatorname{tg} x = 10{,}26928 - 10$, $\log \operatorname{cotg} x = 9{,}40600 - 10$.

10. Ook:
$\log \sin x = -0{,}60742$, $\log \cos x = -0{,}18110$,
$\log \operatorname{tg} x = -0{,}26935$, $\log \operatorname{cotg} x = -0{,}41273$.

11. Bepaal de scherpe hoeken x uit de volgende gegevens:
$\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\cos x = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} x = 1\frac{3}{7}$.

12. De volgende opgaven hebben betrekking op een driehoek ABC, waarvan $\angle\ C = 90°$.
a) Gegeven: $c = 217$, $\angle\ A = 23°17'46''$. Gevraagd: a en b.
b) „ : $a = 45{,}7$, $\angle\ A = 52°41'13''$. „ : b en c.
c) „ : $a = 8$, $\angle\ B = 41°52'39''$. „ : b en c.
d) „ : $a = 17$, $b = 29$. Gevraagd: c en $\angle\ A$.
e) „ : $a = 8$, $c = 13$. „ : b en $\angle\ B$.

13. Van een gelijkbenige driehoek is de basis 10 en een been 17. Bereken de hoeken.

14. Van een gelijkbenige driehoek is de basis 12 en de tophoek 68°14′42″. Bereken de lengte van een been.

15. Van een ruit is een der hoeken 40°38′25″ en de zijde 15. Bereken de straal van de ingeschreven cirkel.

16. Druk de zijde van een regelmatige zevenhoek uit in de straal van de omgeschreven cirkel.

Geef vervolgens een algemene formule voor a_n uitgedrukt in de straal van de omgeschreven cirkel.

17. Bepaal het oppervlak van een parallelogram, als de zijden 5 en 6 zijn en een der hoeken 32°17'49''.

18. Van de top van een toren, die 60 m hoog is, ziet men een voorwerp, dat met de voet van de toren in een horizontaal vlak ligt, onder een hoek van 10° met de horizon. Hoe ver is het voorwerp van de voet van de toren verwijderd?

19. Een monument staat op een voetstuk van 3 m. Uit een punt, dat 10 m voor het monument en 1,5 m boven het horizontale vlak, dat door het ondereinde van het voetstuk gaat, ligt, ziet men het monument (zonder voetstuk) onder 25°.

Hoe hoog is het monument?

20. Met een instrument van 1,5 m hoogte, dat op een horizontaal vlak, gaande door de voet van een toren, geplaatst is, meet men de hoek, die de lijn naar de top van de toren met de horizon maakt en vindt daarvoor 50°. Men verplaatst het instrument 35 m zodanig, dat de beide standplaatsen en de voet van de toren in een rechte lijn liggen, en vindt dan voor die hoek 35°. Hoe hoog is de toren? (Hierbij een tafel der rechtstreekse waarden gebruiken.)

AFLEIDING VAN ENIGE FORMULES. HERLEIDING VAN VORMEN. BEWIJZEN VAN IDENTITEITEN.

§ 9. We zullen nu het verband, dat er tussen de zes goniometrische verhoudingen van een hoek bestaat, in formules uitdrukken.

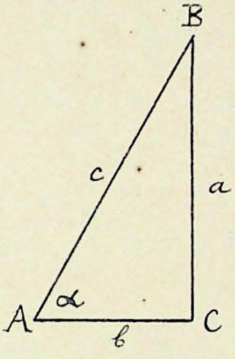

Fig. 7.

Uit eigenschappen van verhoudingen en $sin\ \alpha = \frac{a}{c}$, $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$, $tg\ \alpha = \frac{a}{b}$, $cotg\ \alpha = \frac{b}{a}$, $sec\ \alpha = \frac{c}{b}$, $cosec\ \alpha = \frac{c}{a}$, volgt:

$$\frac{a}{c} \times \frac{c}{a} = 1, \text{ of: } \mathbf{sin}\ \alpha \times \mathbf{cosec}\ \alpha = \mathbf{1} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1, \text{ of: } \mathbf{cos}\ \alpha \times \mathbf{sec}\ \alpha = \mathbf{1} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1, \text{ of: } \mathbf{tg}\ \alpha \times \mathbf{cotg}\ \alpha = \mathbf{1} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}, \text{ of: } \mathbf{tg}\ \alpha = \frac{\mathbf{sin}\ \alpha}{\mathbf{cos}\ \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

en, in verband met (3): $\mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{\mathbf{cos}\ \alpha}{\mathbf{sin}\ \alpha}$ . . . . . . (5)

Ten slotte kan de stelling van Pythagoras nog op drie verschillende manieren in goniometrische vorm uitgedrukt worden.

Deelt men de beide leden van de vergelijking:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

door c^2, dan komt er:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\text{of: } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Deelt men door b^2, dan heeft men:

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\text{of: } \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Deling door a^2 geeft:

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\text{of: } 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

§ 10. Men kan van deze formules gebruik maken, om uit een der zes verhoudingen de andere af te leiden. Is b.v. $tg\ \alpha = \frac{5}{12}$ dan heeft men,

volgens (3): $\frac{5}{12} \times cotg\ \alpha = 1$, dus $cotg\ \alpha = 2\frac{2}{5}$

„ (7): $\frac{25}{144} + 1 = sec^2\alpha$, „ $sec\ \alpha = 1\frac{1}{12}$

„ (2): $cos\ \alpha \times \frac{13}{12} = 1$, „ $cos\ \alpha = \frac{12}{13}$

„ (4): $\frac{5}{12} = \dfrac{sin\ \alpha}{\frac{12}{13}}$, dus $sin\ \alpha = \frac{5}{13}$

„ (1): $\frac{5}{13} \times cosec\ \alpha = 1$, dus $cosec\ \alpha = 2\frac{3}{5}$.

Zo lang we met scherpe hoeken werken, moet bij het gebruiken der formules (6), (7) en (8), de positieve wortel genomen worden. Later zal ook de negatieve wortel betekenis krijgen.

Het hier aangegeven gebruik van de formules is alleen van theoretisch belang, want de methode van § 4, met behulp van een rechthoekige driehoek, is eenvoudiger en sneller. De formules kunnen echter goede diensten bewijzen bij het vereenvoudigen van vormen. Vindt men b.v. bij het uitrekenen van een gevraagde lijn van een figuur, als antwoord $a\ cos\ \alpha\ tg\ \alpha$, waarin a en α

gegeven zijn, dan kan men daarvoor $a \sin \alpha$ schrijven, waardoor het rekenwerk verminderd wordt. Ook komt het meermalen voor, dat men, zonder een bepaalde figuur op het oog te hebben, met goniometrische verhoudingen algebraïsche bewerkingen moet uitvoeren. Ten slotte kan men met behulp van die formules de identiteit van, ogenschijnlijk geheel verschillende, vormen constateren.

§ 11. Voorbeelden.

I. Vereenvoudig: $\sec^2\alpha\,(1 + \sin^4\alpha) + \sin^2\alpha - tg^2\alpha$.

Men heeft: $\sec^2\alpha + \sec^2\alpha \sin^4\alpha + \sin^2\alpha - tg^2\alpha$

$$= 1 + \sec^2\alpha \sin^4\alpha + \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$= 1 + \sin^2\alpha\,(\sec^2\alpha \sin^2\alpha + 1)$$
$$= 1 + \sin^2\alpha \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$= 1 + \sin^2\alpha\,(tg^2\alpha + 1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$= 1 + \sin^2\alpha \sec^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$= 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$= 1 + tg^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$= \sec^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

II. Te bewijzen: $\dfrac{\sec\alpha}{1 + tg\,\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$.

Wat bewezen moet worden is een identiteit, d. w. z. de beide leden van de vergelijking stellen voor alle waarden van α gelijke getallen voor. Men kan een identiteit bewijzen door een der leden zodanig te vervormen, dat men een vorm verkrijgt, die geheel met het andere lid overeenstemt.

$$\frac{\sec\alpha}{1 + tg\,\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2) \text{ en } (4)$$
$$\text{,,} \quad = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha}.$$
$$\text{,,} \quad = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}.$$
$$\text{,,} \quad = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}.$$
$$\text{,,} \quad = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

III. Te bewijzen:
$\sin^2\alpha \cos^4\alpha + 2 \sin^4\alpha - \sin^6\alpha = 1 - \operatorname{cotg}^2\alpha \sin^2\alpha$.

Een tweede manier om identiteiten te bewijzen bestaat in het herleiden van beide leden tot dezelfde vorm. We noemen het 1e lid A en het 2e B.

$A = \sin^2\alpha (\cos^4\alpha + 2 \sin^2\alpha - \sin^4\alpha)$.

$A = \sin^2\alpha \{(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) + 2 \sin^2\alpha\}$.

$A = \sin^2\alpha \{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2 \sin^2\alpha\}$.

$A = \sin^2\alpha \{1 \times (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2 \sin^2\alpha\}$ . . . . . (6)

$A = \sin^2\alpha (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.

$A = \sin^2\alpha$ . . . . (6)

$B = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \sin^2\alpha$ . . . . (5)

$B = 1 - \cos^2\alpha$.

$B = \sin^2\alpha$ . . . . (6)

dus $A = B$.

IV. Te bewijzen: $\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^4\alpha = \operatorname{cosec}^4\alpha$.

Een identiteit kan ten slotte ook bewezen worden, door uit te gaan van een der bekende formules en te trachten, door het toepassen van algebraïsche bewerkingen en het gebruik maken van een of meer bekende formules, deze tot de gewenste gedaante te brengen. In deze opgave komen uitsluitend *cotg* α en *cosec* α voor; het ligt dus voor de hand uit te gaan van formule (8),

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

$$1 + 2 \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^4\alpha = \operatorname{cosec}^4\alpha,$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^4\alpha = \operatorname{cosec}^4\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^4\alpha = \operatorname{cosec}^4\alpha \quad . . . . (8)$$

§ 12. Opgaven.

1. Bewijs: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.
2. Bewijs: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 1 - 2 \cos^2\alpha$.
3. Bewijs: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2 \sin^2\alpha - 1$.
4. Bewijs: $2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

5. Bewijs: $sec\ \alpha + cosec\ \alpha - sin\ \alpha - cos\ \alpha = \dfrac{sin^3\alpha + cos^3\alpha}{sin\ \alpha\ cos\ \alpha}$.

6. Vereenvoudig: $tg^2\alpha - sin^2\alpha\ tg^2\alpha - sin^4\alpha$.

7. Bewijs: $sin^2\alpha + cos^2\alpha\ cotg^2\alpha = cosec^2\alpha - 2\ cos^2\alpha$.

8. Vereenvoudig: $sin^6\alpha - cos^4\alpha - sin^4\alpha + sin^2\alpha\ cos^2\alpha + cos^6\alpha$.

9. Bewijs: $\left(\dfrac{1 + tg\ \alpha}{1 + cotg\ \alpha}\right)^2 = \dfrac{1 + tg^2\alpha}{1 + cotg^2\alpha}$.

10. Bewijs: $\dfrac{sin\ \alpha - cos\ \alpha}{sin\ \alpha + cos\ \alpha} \times (tg^2\alpha - 1) = sec^2\alpha - 2\ tg\ \alpha$.

11. Gegeven: $sin\ \alpha \times cos\ \alpha = p$. Gevraagd: *a*) $sin\ \alpha + cos\ \alpha$; *b*) $sin^3\alpha + cos^3\alpha$; *c*) $sin^4\alpha + cos^4\alpha$.

12. Vereenvoudig:

$$\frac{4\ tg^2\alpha}{sec^4\alpha - 4\ tg^2\alpha} - \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{(1 + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha)\ (1 - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha)}$$

13. Gegeven: $sin\ (90° - x) + cosec\ (90° - x) = 3\tfrac{1}{3}$.
Gevraagd: $tg\ x$.

14. Hoe groot is p, als $sin\ x = p - 1$ en $sec\ x = \dfrac{2}{\sqrt{10\,p - 12}}$?

15. Elimineer x uit de vergelijkingen:
$sin\ x + cos\ x = m$ en $sin^3x + cos^3x = n$.

16. Vereenvoudig: $\dfrac{tg\ \alpha\ tg\ (90° - \alpha)}{cos\ \alpha\ sec\ (90° - \alpha)\ cosec\ (90° - \alpha)}$.

17. Gegeven: $\dfrac{sec\ x - cos\ x}{sec\ x + cos\ x} = \dfrac{a^2}{b^2}$. Gevraagd: $cotg\ x$.

18. Als A, B en C de hoeken van een driehoek zijn, bewijs dan: $sin\ \tfrac{1}{2}\ A = cos\ \tfrac{1}{2}\ (B + C)$ en $cos\ \tfrac{1}{2}\ A = sin\ \tfrac{1}{2}\ (B + C)$.

19. Vereenvoudig: $\left(\dfrac{tg\ \alpha + 1}{tg\ \alpha - 1} + \dfrac{tg\ \alpha - 1}{tg\ \alpha + 1}\right) \times \dfrac{1 - cotg^2\alpha}{1 + cotg^2\alpha}$.

20. Welke scherpe waarde van x voldoet aan de vergelijking: $sin^2x + cos^2x + tg^2x + cotg^2x + sec^2x + cosec^2x = 7$?

21. In $\triangle$ ABC, waarvan $\angle$ C = 90°, trekt men de hoogtelijn CD. Als CD = h en $\angle$ A = α, druk dan in deze gegevens uit: AC, BC, AD, BD en AB (de laatste zonder gebruik te maken van de antwoorden voor AD en BD). Bewijs nu: *a*) AB = AD + BD; *b*) $AC^2 = AB \times AD$; *c*) $BC^2 = AB \times BD$; *d*) $CD \times AB = AC \times BC$.

DE GRENSGEVALLEN 0° en 90°.

§ 13. Voor een kleine waarde van α, zijn $sin\ \alpha = \frac{a}{c}$ en $tg\ \alpha = \frac{a}{b}$ klein, $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$ en $sec\ \alpha = \frac{c}{b}$ verschillen weinig van 1, terwijl $cotg\ \alpha = \frac{b}{a}$ en $cosec\ \alpha = \frac{c}{a}$ groot zijn.

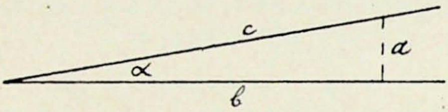

Fig. 8.

Laat men α tot 0° naderen, dan naderen $sin\ \alpha$ en $tg\ \alpha$ tot 0, $cos\ \alpha$ en $sec\ \alpha$ tot 1 terwijl de waarden van $cotg\ \alpha$ en $cosec\ \alpha$ steeds groter worden. Laat men ten slotte de benen van de hoek samenvallen, waardoor $\alpha = 0°$ wordt, dan is $a = 0$ en $b = c$, zodat $\frac{a}{c} = 0$, $\frac{a}{b} = 0$, $\frac{b}{c} = 1$ en $\frac{c}{b} = 1$. Men heeft dus:

$sin\ 0° = 0$, $tg\ 0° = 0$, $cos\ 0° = 1$ en $sec\ 0° = 1$.

De verhoudingen $\frac{b}{a}$ en $\frac{c}{a}$ hebben echter geen betekenis meer omdat delen door 0 onmogelijk is. We zouden dus feitelijk moeten vaststellen: $cotg\ 0°$ en $cosec\ 0°$ bestaan niet. We weten echter dat, als $\alpha \neq 0°$, $cotg\ \alpha$ en $cosec\ \alpha$ wel bepaalde waarden hebben en dat deze elke waarde, hoe groot ook genomen, kunnen overschrijden, als men α maar klein genoeg neemt. Dit verschijnsel drukt men uit met de woorden: $cotg\ \alpha$ en $cosec\ \alpha$ zijn **oneindig groot** als $\alpha = 0°$. Men schrijft hiervoor: $cotg\ 0° = \infty$ en $cosec\ 0° = \infty$.

Men mag het symbool ∞ volstrekt niet behandelen alsof het een bepaald getal is. Zo behoeft $\infty - \infty$ niet 0 te zijn, $\frac{\infty}{\infty}$ is lang niet altijd 1, enz. Steeds moet men bedenken, dat dit symbool betrekking heeft op een veranderlijke grootheid, die onder zekere, *te noemen*, voorwaarde(n) groter wordt dan elk denkbaar getal.

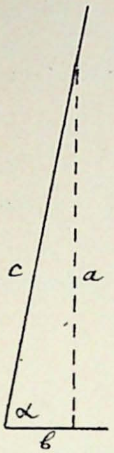

Fig. 9.

Heeft α een waarde die weinig van 90° verschilt, dan zijn *cos* $\alpha = \frac{b}{c}$ en *cotg* $\alpha = \frac{b}{a}$ klein, *sin* $\alpha = \frac{a}{c}$ en *cosec* $\alpha = \frac{c}{a}$ verschillen weinig van 1, terwijl *tg* $\alpha = \frac{a}{b}$ en *sec* $\alpha = \frac{c}{b}$ groot zijn.

Laat men α tot 90° naderen, dan naderen *cos* α en *cotg* α tot 0, *sin* α en *cosec* α tot 1 terwijl *tg* α en *sec* α steeds groter worden. Neemt men ten slotte $\alpha = 90°$, dan is $b = 0$ en $a = c$, zodat $\frac{b}{c} = 0$, $\frac{b}{a} = 0$, $\frac{a}{c} = 1$ en $\frac{c}{a} = 1$. Men heeft dus: *cos* $90° = 0$, *cotg* $90° = 0$, *sin* $90° = 1$ en *cosec* $90° = 1$.

Een redenering, die in niets verschilt van de behandeling van *cotg* 0° en *cosec* 0°, geeft verder: *tg* $90° = \infty$ en *sec* $90° = \infty$.

Overzicht.

sin $0° = 0$	*sin* $= 90° = 1$
cos $0° = 1$	*cos* $90° = 0$
tg $0° = 0$	*tg* $90° = \infty$
cotg $0° = \infty$	*cotg* $90° = 0$
sec $0° = 1$	*sec* $90° = \infty$
cosec $0° = \infty$	*cosec* $90° = 1$.

§ 14. Voor waarden van α, die weinig van 0° verschillen, zijn, zoals reeds is opgemerkt, *sin* α en *tg* α zeer klein. Over deze kleine waarden van α, *sin* α en *tg* α kan nog een opmerking gemaakt worden, die voor de toepassing van de wiskunde op de natuurkunde en sterrenkunde van groot belang is.

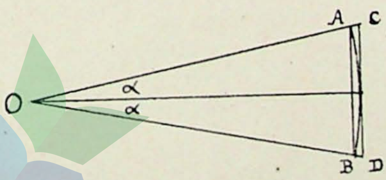

Fig. 10.

In fig. 10 stelt bg AB een

kleine boog van een cirkel voor, behorende bij een middelpuntshoek 2α. De raaklijn, die evenwijdig loopt met de koorde AB is, voor zover zij tussen de benen van hoek 2α ligt, voorgesteld door de rechte CD. Volgens de planimetrie is nu:

$$AB < \text{bg } AB < CD$$

en dus ook: $$\frac{AB}{r} < \frac{\text{bg } AB}{r} < \frac{CD}{r}.$$

Nu is $\frac{AB}{r} = 2 \sin \alpha$, $\frac{CD}{r} = 2 \operatorname{tg} \alpha$, terwijl $\frac{\text{bg } AB}{r}$ = het aantal radialen van hoek 2α.

Drukt men de hoek uit in radialen, dan gelden de ongelijkheden:

$$2 \sin \alpha < 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha$$

of: $$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieruit volgt: $\frac{1}{\sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Vermenigvuldigt men de leden van deze ongelijkheden met $\sin \alpha$, dan komt er:

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Daar nu $\lim\limits_{\alpha = 0} \cos \alpha = 1$, is ook: $\lim\limits_{\alpha = 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

Verder is: $\lim\limits_{\alpha = 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha = 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha} = 1$.

Eveneens: $\lim\limits_{\alpha = 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = \lim\limits_{\alpha = 0} \frac{1}{\cos \alpha} = 1$.

Bij de toepassing van de wiskunde op de natuurkunde en sterrenkunde maakt men hiervan gebruik, door, bij kleine waarden van α, $\sin \alpha$ of $\operatorname{tg} \alpha$ door α te vervangen. Hierbij worden natuurlijk fouten gemaakt, maar zolang die fouten kleiner blijven dan de onvermijdelijke waarnemingsfouten, is er tegen deze verwisseling geen bezwaar. Uit de volgende tabel blijkt hoe gering die fouten zijn.

α in graden en minuten.	α in radialen.	*sin* α.	*tg* α.
0°	0,00000	0,00000	0,00000
20′	0,00582	0,00582	0,00582
40′	0,01164	0,01164	0,01164
1°	0,01745	0,01745	0,01746
1° 20′	0,02327	0,02327	0,02328
1° 40′	0,02909	0,02908	0,02910
2°	0,03491	0,03490	0,03492
3°	0,05236	0,05234	0,05241
5°	0,08727	0,08716	0,08749
6°	0,10472	0,10453	0,10510
7°	0,12217	0,12187	0,12278
8°	0,13963	0,13917	0,14054.

Is de betrouwbaarheid der waarnemingen van dien aard, dat men bij de uit te voeren berekeningen niet verder kan gaan dan de derde decimaal, dan mag men dus nog bij een hoek van 6° de sinus of de tangens door het aantal radialen van de hoek vervangen.

GONIOMETRISCHE VERHOUDINGEN VAN WILLEKEURIGE HOEKEN. NEGATIEVE HOEKEN.

§ 15. Alvorens hoeken groter dan 90° te beschouwen, zullen we een eenvoudig middel bespreken, dat ons in staat stelt de waarden van de *verschillende* goniometrische verhoudingen van *dezelfde* hoek, en ook die van *gelijknamige* verhoudingen van *verschillende* hoeken, met elkaar te vergelijken.

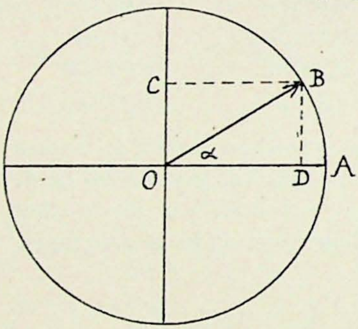

Fig. 11*a*.

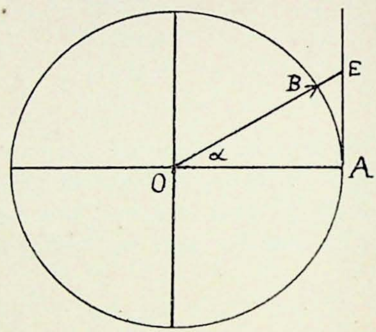

Fig. 11*b*.

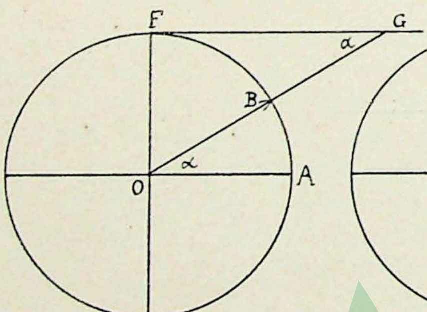

Fig. 11*c*.

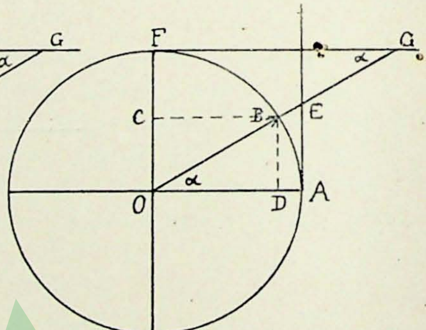

Fig. 11.

In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte middellijnen, waarvan de ene in de richting van de lijnen van een schrift wordt getekend. De straal OA, die, van O uit, naar rechts getrokken wordt, is het vaste been van *alle* hoeken, die we zullen beschouwen. Het beweeglijke been, dat in de stand behorende bij 0° met het vaste been samenvalt, wordt gedraaid in een richting tegengesteld aan de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk. OB is dus de stand van het beweeglijke been van een willekeurige scherpe hoek α.

De verschillende hulplijnen, die we nu gaan trekken, hebben ten doel er voor te zorgen, dat van alle goniometrische verhoudingen van α de noemer gelijk wordt aan de straal (r) van de cirkel. Bij het vergelijken van de waarden der goniometrische verhoudingen behoeven we dan alleen op de tellers te letten. Nemen we de straal als lengte-eenheid aan, dan zijn de aantallen lengte-eenheden van de tellers der breuken gelijk aan de waarden der goniometrische verhoudingen.

We laten uit B (fig. 11*a*) loodlijnen neer op de beide middellijnen. Nu is $\sin\alpha = \frac{\mathrm{BD}}{r} = \frac{\mathrm{OC}}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van OC is de sinus van hoek α.

Verder is $\cos\alpha = \frac{\mathrm{OD}}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van OD is de cosinus van hoek α.

In fig. 11*b* is de raaklijn in A aan de cirkel getrokken en het beweeglijke been OB verlengd tot het de raaklijn in E snijdt. Nu is $tg\,\alpha = \frac{\mathrm{AE}}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van AE is de tangens van hoek α.

Verder is $\sec\alpha = \frac{\mathrm{OE}}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van OE is de secans van hoek α.

In fig. 11*c* is de raaklijn in F aan de cirkel getrokken en het beweeglijke been OB verlengd, tot het de raaklijn in G snijdt. Nu is $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\mathrm{FG}}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van FG is de cotangens van hoek α.

Verder is $cosec\ \alpha = \frac{OG}{r}$.

Het aantal lengte-eenheden van OG is de cosecans van hoek α.

Uit de figuren 11*a*, 11*b* en 11*c* is nu onmiddellijk te zien, dat, bij het groter worden van α, $sin\ \alpha$, $tg\ \alpha$ en $sec\ \alpha$ aangroeien en $cos\ \alpha$, $cotg\ \alpha$ en $cosec\ \alpha$ afnemen. Ook de waarden van de goniometrische verhoudingen voor de grensgevallen 0° en 90° zijn gemakkelijk uit de figuur te bepalen. *Tg* 90°, *cotg* 0°, *sec* 90° en *cosec* 0° worden bij deze beschouwing afgeleid uit veranderlijke breuken, waarvan de noemers r zijn en de tellers groter worden dan elke denkbare lengte, in tegenstelling met de methode van § 13 waarbij de tellers eindig blijven en de noemers tot 0 naderen.

In fig. 11 zijn de bovengenoemde figuren verenigd. Deze stelt ons in staat verschillende goniometrische verhoudingen van dezelfde hoek met elkaar te vergelijken. Zo blijkt b.v.: voor alle scherpe waarden van α, is $tg\ \alpha > sin\ \alpha$; voor waarden van $\alpha < 45°$, is $tg\ \alpha < cotg\ \alpha$; voor waarden van α, gelegen tussen 45° en 90°, is $tg\ \alpha > cotg\ \alpha$.

§ 16. Wanneer we in fig. 11 het beweeglijke been van α, nadat het de stand 90° heeft bereikt, verder draaien in de afgesproken richting, wordt $\alpha > 90°$. Valt het beweeglijke been in het verlengde van OA, dan is $\alpha = 180°$. Draait men verder door, dan wordt $\alpha > 180°$ en verkrijgt, als het beweeglijke been in het verlengde van OF valt, de waarde 270°. Tenslotte zal, bij voortgezette draaiing, $\alpha > 270°$ worden, en als het beweeglijke been samenvalt met OA, de waarde 360° bereiken.

De hoeken tussen 0° en 90° noemt men hoeken in **het 1e kwadrant.**

De hoeken tussen 90° en 180° noemt men hoeken in **het 2de kwadrant.**

De hoeken tussen 180° en 270° noemt men hoeken in **het 3de kwadrant.**

De hoeken tussen 270° en 360° noemt men hoeken in **het 4de kwadrant.**

We zullen de kwadranten in het vervolg aanduiden met Romeinse cijfers I, II, III en IV.

Men kan nu de draaiing nog verder voortzetten, waardoor de hoek groter wordt dan 360°, terwijl het veranderlijke been weer in het 1e kwadrant komt te liggen. Deze handelwijze is dikwijls noodzakelijk. Gaat men uitsluitend op de tekening af, dan is er geen verschil te zien tussen een hoek van 30° en een van 390°; wanneer echter in een vraagstuk een onbekende hoek wordt voorgesteld door $5x$, dan heeft het antwoord 30° een geheel andere betekenis dan 390°. Uit het eerste antwoord volgt toch $x = 6°$ en uit het tweede $x = 78°$. Ook is er verschil tussen deze hoeken wanneer zij aangeven, hoeveel graden de as van een machine gewenteld is; in het tweede geval is er een gehele omwenteling meer geschied dan in het eerste.

Behalve hoeken, die groter zijn dan 360°, zullen we ook **negatieve hoeken** beschouwen. Deze verkrijgt men door, uitgaande van de stand 0°, het veranderlijke been te draaien in een richting die overeenstemt met de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk.

Hieruit volgt:

De hoeken	tussen	0° en — 90°	liggen	in	IV.
,,	,,	,,	— 90° en — 180°	,,	,,	III.
,,	,,	,,	— 180° en — 270°	,,	,,	II.
,,	,,	,,	— 270° en — 360°	,,	,,	I.

Alle positieve en negatieve hoeken kunnen geschreven worden in de gedaante $\alpha + n . 360°$, waarin α een positieve hoek $< 360°$ voorstelt en n een positief of negatief *geheel* getal. Wenst men b.v. dat deze hoek de waarde $— 517°48'$ verkrijgt, dan neemt men $\alpha = 202°12'$ en $n = — 2$.

Bij definitie worden de goniometrische verhoudingen uitsluitend bepaald door de stand van de benen. Er wordt dus, ten opzichte van de waarden der goniometrische verhoudingen, geen onderscheid gemaakt tussen alle hoeken, die, bij constante waarde van α, begrepen zijn in de bovengenoemde gedaante $\alpha + n . 360°$. Dus $sin\ (\alpha + n . 360°) = sin\ \alpha$, enz. Bij het maken van grafische voorstellingen maakt men echter wel onderscheid tussen de hoeken die in de vorm $\alpha + n . 360°$ zijn begrepen. Men moet dan ook de kwadranten van hogere (lagere) nummers voorzien. Een hoek van 390° ligt dan in het

5de kwadrant, een hoek van $-30°$ ligt in het 1ste negatieve kwadrant, enz.

§ 17. De bepalingen der goniometrische verhoudingen, die in § 3 in de eerste plaats zijn gegeven, behouden wel is waar hun betekenis, als de hoeken groter dan 90° zijn, maar hebben het bezwaar, dat van de vier hoeken: α, $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ en $360° - \alpha$ (fig. 12) de gelijknamige goniometrische verhoudingen aan elkaar gelijk zijn.

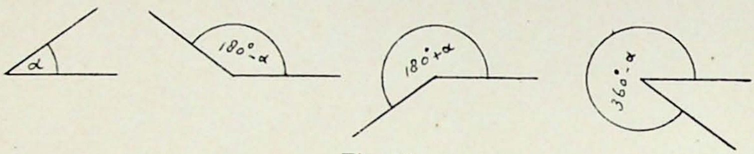

Fig. 12.

Om aan dit bezwaar, althans gedeeltelijk, tegemoet te komen, heeft men aan de goniometrische verhoudingen ook tekens + en — gegeven. Deze tekens kiest men in overeenstemming met de tekens, die bij het maken van grafische voorstellingen aan de coördinaten van een punt gegeven worden. Vergelijkt men de beide middellijnen van de cirkel (§ 15) met de assen van een rechthoekig coördinatenstelsel, dan kan men de verticale middellijn sinus-as en de horizontale middellijn cosinus-as noemen. Beide assen hebben, evenals elke rechte, waarop reële getallen afgebeeld worden, een nulpunt (het middelpunt van de cirkel), een positief deel en een negatief deel. Bij de sinus-as wordt het bovenste deel positief en het onderste deel negatief gerekend, en bij de cosinus-as geeft men aan het rechter deel het positieve en aan het linker deel het negatieve teken. Verder wordt het teken van de tangens zo gekozen, dat aan de formule $tg\ \alpha = \dfrac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$ wordt voldaan, terwijl de tekens van cotangens, secans en cosecans respectievelijk aan die van tangens, cosinus en sinus gelijk genomen worden.

De regels, die in § 15 gegeven zijn voor het aflezen van de goniometrische verhoudingen uit een cirkel, gaan, met in achtneming der tekens, onveranderd door voor hoeken in alle kwadranten. Voor een hoek in II zal dit worden nagegaan, het onderzoek voor hoeken in III en IV wordt aan de leerling overgelaten.

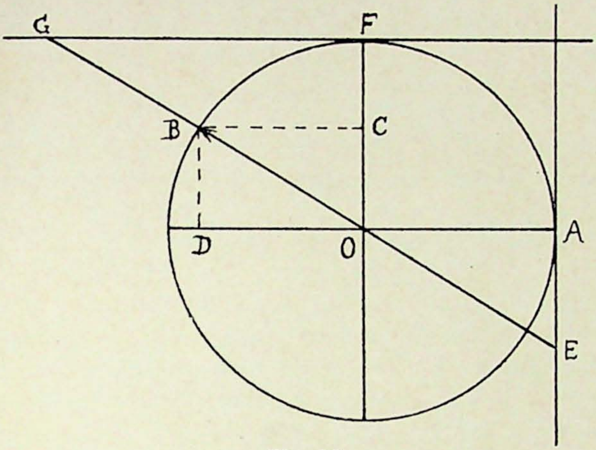

Fig. 13.

$$\sin \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{BD}}{r} = \frac{\mathrm{OC}}{r} \ (+).$$

$$\cos \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OD}}{r} \ (-).$$

$$\mathrm{tg} \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{AE}}{r} \ (-), \text{ omdat } \triangle \mathrm{OBD} \backsim \triangle \mathrm{OEA}.$$

$$\mathrm{cotg} \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{FG}}{r} \ (-), \text{ omdat } \triangle \mathrm{OBD} \backsim \triangle \mathrm{GOF}.$$

$$\sec \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OE}}{r} \ (-), \text{ omdat } \triangle \mathrm{OBD} \backsim \triangle \mathrm{OEA}.$$

$$\mathrm{cosec} \angle \mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{OG}}{r} \ (+), \text{ omdat } \triangle \mathrm{OBD} \backsim \triangle \mathrm{GOF}.$$

Ook de tekens zijn gemakkelijk uit de figuur te bepalen, als men zich houdt aan de volgende afspraken:

Wordt OC (uit O) naar *boven* gemeten, dan is de sinus *positief*.
„ „ „ „ „ *beneden* „ „ „ „ „ *negatief*.
Wordt OD (uit O) naar *rechts* gemeten, dan is de cosinus *positief*.
„ „ „ „ „ *links* „ „ „ „ „ *negatief*.
Wordt AE (uit A) naar *boven* gemeten, dan is de tangens *positief*.
„ „ „ „ „ *beneden* „ „ „ „ „ *negatief*.

Wordt FG (uit F) naar *rechts* gemeten, dan is de cotangens *positief*.
,, ,, ,, ,, ,, *links* ,, ,, ,, ,, ,, *negatief*.
Ligt OE *op* OB dan is de secans *positief*.
,, ,, *in het verlengde van* ,, ,, ,, ,, ,, *negatief*.
Ligt OG *op* OB dan is de cosecans *positief*.
,, ,, *in het verlengde van* ,, ,, ,, ,, ,, *negatief*.

§ 18. Bij elke hoek in II, III of IV behoort een hoek in I, waarvan de goniometrische verhoudingen dezelfde volstrekte waarden hebben.

Ligt α in II, dan is deze hoek $180° - \alpha$.
,, ,, ,, III, ,, ,, ,, ,, $\alpha - 180°$.
,, ,, ,, IV, ,, ,, ,, ,, $360° - \alpha$.

Hieruit volgt, dat de formules van § 9, als men alleen op de volstrekte waarden let, ook gelden voor hoeken $> 90°$.

Verder zijn in § 17 de tekens zó gekozen, dat *sin* α en *cosec* α, *cos* α en *sec* α, *tg* α en *cotg* α, altijd in teken overeenstemmen, zodat de producten van deze paren goniometrische verhoudingen voor elke waarde van α positief zijn. Ook is het teken van *tg* α altijd gelijk aan dat van $\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$, waaruit weer volgt dat *cotg* α en $\frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha}$ voor alle waarden van α gelijke tekens hebben. Ten slotte hebben de tekens geen invloed op de drie formules, waarin de goniometrische verhoudingen uitsluitend in het kwadraat voorkomen.

De formules van § 9 gelden dus voor alle waarden van α.

§ 19. Uit de afspraken betreffende de tekens volgt, dat de stand van het beweeglijke been niet bepaald is, als men van α een goniometrische verhouding kent. Weet men b.v. dat $sin\ \alpha = -\frac{8}{17}$ dan kan α in III of in IV liggen. Past men nu de formules van § 9 toe, ter bepaling van de andere goniometrische verhoudingen, dan zal men bij het bepalen van wortels de beide tekens moeten nemen. Men vindt: $cos\ \alpha = \mp \frac{15}{17}$, $tg\ \alpha = \pm \frac{8}{15}$, $cotg\ \alpha = \pm \frac{15}{8}$, $sec\ \alpha = \mp \frac{17}{15}$ en $cosec\ \alpha = -\frac{17}{8}$ (het bovenste teken heeft betrekking op III, het onderste op IV).

Is, behalve de waarde van een der goniometrische verhoudingen, ook het kwadrant gegeven, waarin α ligt, dan zijn de andere goniometrische verhoudingen natuurlijk volkomen bepaald. Het is dan weer gemakkelijker de methode van § 4 te volgen, door, in plaats van α, de bij α behorende hoek in I te beschouwen, van deze hoek de goniometrische verhoudingen te bepalen met behulp van een rechthoekige driehoek, en daarna de tekens in overeenstemming te brengen met de, voor het gegeven kwadrant, vastgestelde regels.

Ook het bepalen van de grootte van een hoek, uitgedrukt in graden, minuten en seconden, uit een gegeven goniometrische verhouding, zal nu een uitbreiding moeten ondergaan, vooral wanneer men ook negatieve hoeken en aantallen graden boven 360° wil beschouwen. We komen hierop terug in § 21 no. 11 en § 23 no. 12.

§ 20. Ten einde een volledig overzicht te kunnen geven van de veranderingen der goniometrische verhoudingen als de hoek alle waarden doorloopt van 0° tot 360°, moeten nog de beide grensgevallen 180° en 270° beschouwd worden (het grensgeval 360° is gelijk aan dat van 0°). Een redenering, die volkomen overeenkomt met die van § 13 geeft:

$$\begin{array}{llll}
\sin 180° = 0 & & \sin 270° = -1 \\
\cos 180° = -1 & & \cos 270° = 0 \\
tg\ 180° = 0 & & tg\ 270° = \infty \\
cotg\ 180° = \infty & & cotg\ 270° = 0 \\
\sec 180° = -1 & & \sec 270° = \infty \\
cosec\ 180° = \infty & & cosec\ 270° = -1.
\end{array}$$

Ten opzichte van het oneindig groot worden van enige goniometrische verhoudingen voor bepaalde waarden van de hoek, moet nog het volgende opgemerkt worden.

Nu we het beweeglijke been in twee richtingen kunnen draaien, is het mogelijk de grensstanden op twee manieren te bereiken. Als voorbeeld nemen we enige waarden van *cotg* α, als α tot 180° nadert.

α:	179°	179° 30′	179° 50′	180°	180° 10′	180° 30′	181°
cotg α:	— 57	— 115	— 344	?	+ 344	+ 115	+ 57.

De volstrekte waarde van *cotg* α wordt dus, als α tot 180° nadert, steeds groter en kan elke denkbare waarde overschrijden. De uitdrukking *cotg* 180° = ∞ is echter onvolledig; men moet $-\infty$ schrijven als α van de kleine kant tot 180° nadert en $+\infty$ als dit naderen van de grote kant geschiedt. Laat men α van de kleine kant tot 180° naderen en daarna groter worden dan 180°, wat o. a. gebeurt als men α alle waarden van 0° tot 360° laat doorlopen, dan zegt men dat $cotg\ \alpha$, als $\alpha = 180°$, van $-\infty$ op $+\infty$ overspringt. Men behoort dan te schrijven $cotg\ 180° = \mp \infty$.

§ 21. Opgaven.

1. Construeer x, als $sin\ x + cos\ x = 1\frac{1}{3}$. Toon aan, dat x in het eerste kwadrant ligt.
2. Leid uit de constructie van no. 1 de maximum- en minimum-waarde af van $sin\ x + cos\ x$, als x een scherpe hoek voorstelt.
3. Construeer een scherpe hoek x, als $sin\ x - cos\ x = \frac{3}{4}$.
4. Als men de scherpe hoek, die in 3 geconstrueerd is, α noemt, welke hoek voldoet dan ook aan dezelfde vergelijking? En welke hoeken voldoen aan de volgende vergelijkingen: $-sin\ x + cos\ x = \frac{3}{4}$, $sin\ x + cos\ x = \frac{3}{4}$, $-sin\ x - cos\ x = \frac{3}{4}$?
5. Construeer x, als $sec\ x + tg\ x = 2$. Toon aan, dat x in het eerste kwadrant ligt. Bereken vervolgens de waarden van $sec\ x$ en $tg\ x$ en bepaal de grootte van de hoek in graden, minuten en seconden.
6. Construeer x, als $sec\ x - tg\ x = \frac{1}{3}$.
7. Construeer x, als $sec\ x - tg\ x = 1\frac{1}{2}$. Controleer de constructie door $tg\ x$ te berekenen.
8. Hoe verandert y in de volgende functies, als x alle waarden doorloopt van 0° tot 360°?
   $a)\ y = sin\ x$; $b)\ y = cos\ x$; $c)\ y = tg\ x$; $d)\ y = cotg\ x$; $e)\ y = sec\ x$; $f)\ y = cosec\ x$.
   Geef door middel van de tekens $\pm$ en $\mp$ aan, hoe de functies zich gedragen als zij oneindig groot worden.
9. Welke van de functies, die in 8 zijn onderzocht, hebben voor elke waarde van x een eindige waarde, en tussen welke grenzen liggen deze waarden?
   Welke functies kunnen elke bestaanbare waarde aannemen?
   Wat weet ge van de beide andere functies?

10. **Maak van elke der beschouwde functies een grafische voorstelling in het interval 0° — 360°** (neem op de X-as 1 cm = 30° en op de Y-as 2 cm als lengte-eenheid aan).

11. Hoe worden deze grafische voorstellingen, als men het interval neemt van $-n \times 360°$ tot $n \times 360°$? (n is een positief geheel getal.)

Geef nu de volledige oplossing van de volgende vergelijkingen:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; *b*) $\sin x = -\frac{1}{2}$; *c*) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; *d*) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; *e*) $tg\ x = \sqrt{3}$; *f*) $tg\ x = -\sqrt{3}$; *g*) $cotg\ x = 1$; *h*) $cotg\ x = -1$.

12. Bereken de goniometrische verhoudingen van een hoek α bij de volgende gegevens:

a) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$, α ligt in IV;

b) $\cos \alpha = 0{,}2$, α ligt in IV;

c) $cotg\ \alpha = \frac{5}{12}$, α ligt in III;

d) $\sec \alpha = -2\frac{1}{2}$, α ligt in II. [1]

13. Noem alle hoeken gelegen tussen $-360°$ en $+360°$, waarvan de sinus gelijk is aan $\sin 117°19'$.

Ook die, waarvan de cotangens gelijk is aan $cotg -114°46'$. [2]

---

[1] Zie 1ste druk bladz. 43 no. 11.
[2] ,, ,, ,, ,, ,, ,, 12.

HERLEIDING VAN HOEKEN NAAR HET EERSTE KWADRANT.

§ 22. Zowel de rechtstreekse tafels, als de logarithmentafels der goniometrische verhoudingen vermelden slechts scherpe hoeken. Komen in een berekening hoeken $> 90°$ voor, dan zal men de goniometrische verhoudingen van deze hoeken dus moeten vervangen door die van scherpe hoeken. Men noemt dit werk: *herleiden van hoeken naar het eerste kwadrant.*

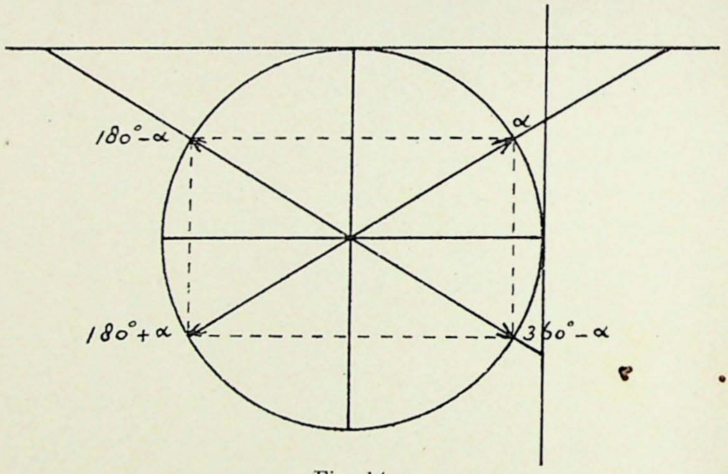

Fig. 14.

Uit fig. 14 blijkt, dat de goniometrische verhoudingen van de hoeken α, $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ en $360° - \alpha$ alleen in de tekens verschillen. Beschouwt men ook nog negatieve hoeken en hoeken $> 360°$ of $< -360°$, dan zullen toch alle sommen en verschillen van $\pm\,\alpha$ en een *even* veelvoud van 90° een dezer standen van het beweeglijke been geven. Zo behoort b.v. bij $-\alpha - 720°$ dezelfde stand van het beweeglijke been als bij $360° - \alpha$. Hieruit volgt:

De goniometrische verhoudingen van alle hoeken, be-

grepen in de vorm $\pm \alpha + 2n \times 90°$ (n pos. of neg. geheel) zijn gelijknamig met die van α.

Vervangt men α door $90° - \alpha$, dan gaan de drie andere hoeken over in: $180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$, $180° + (90° - \alpha) = 270° - \alpha$ en $360° - (90° - \alpha) = 270° + \alpha$.

De goniometrische verhoudingen van $90° - \alpha$, $90° + \alpha$, $270° - \alpha$ en $270° + \alpha$ zullen dus ook alleen in de tekens verschillen. Beschouwt men ook negatieve hoeken en hoeken $> 360°$ of $< -360°$ dan zullen toch alle sommen en verschillen van $\pm \alpha$ en een *oneven* veelvoud van 90° een der standen van het beweeglijke been geven, die bij de genoemde hoeken behoren. Zo zullen $-\alpha - 450°$ en $270° - \alpha$ door dezelfde stand van het beweeglijke been worden aangegeven. Nu zijn de goniometrische verhoudingen van $90° - \alpha$, volgens § 3, *complementair* met die van α, d. w. z. *sin*, *tg* en *sec* van de ene hoek zijn gelijk aan *cos*, *cotg* en *cosec* van de andere hoek en omgekeerd. Hieruit volgt:

De goniometrische verhoudingen van alle hoeken, begrepen in de vorm $\pm \alpha + (2n + 1)\ 90°$ (n pos. of neg. geheel), zijn complementair met die van α.

Het teken moet in elk geval afzonderlijk bepaald worden. Daarbij denkt men zich α scherp, bepaalt het kwadrant waarin de te herleiden hoek ligt, en geeft dan het teken, dat in dat kwadrant bij de beschouwde goniometrische verhouding behoort.

De op die wijze gevonden formules gelden echter voor alle waarden van α, wat gemakkelijk met behulp van de cirkel te bewijzen is. Volgens de bovengenoemde regels is b.v. $\sin(\alpha - 270°) = \cos \alpha$. Is nu α een hoek in III (de leerling make zelf een tekening), dan ligt $\alpha - 270°$ in IV, waaruit blijkt dat beide goniometrische verhoudingen hetzelfde teken hebben. Verder volgt de gelijkheid der volstrekte waarden uit de congruentie van twee driehoeken.

De gegeven regels stellen ons volledig in staat elke herleiding, als hier bedoeld, uit te voeren, zodat het niet nodig is bepaalde formules te geven. Het is echter gemakkelijk de volgende herleidingen steeds onmiddellijk te kunnen toepassen: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$, $\sec(-\alpha) = \sec \alpha$ en $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$.

Het herleiden van hoeken, die in graden, minuten en seconden gegeven zijn, geschiedt nu als volgt:

$sin\ 241°17' = sin\ (180° + 61°17') = -\ sin\ 61°17'$.

$tg\ 293°14' = tg\ (270° + 23°14') = -\ cotg\ 23°14'$.

$cos\ -142°37' = cos\ 142°37' = cos\ (90° + 52°37') = -\ sin\ 52°37'$.

$cotg\ 219°15'36'' = cotg\ (180° + 39°15'36'') = cotg\ 39°15'36''$.

Bij het volgen van deze methode veranderen de aantallen minuten en seconden niet.

§ 23. Opgaven.

1. Herleid alle goniometrische verhoudingen van de volgende hoeken tot goniometrische verhoudingen van α.
$90° - \alpha$; $90° + \alpha$; $180° - \alpha$; $180° + \alpha$; $270° - \alpha$; $270° + \alpha$; $360° - \alpha$.
2. Eveneens van:
$-90° - \alpha$; $-270° - \alpha$; $\alpha - 90°$; $\alpha - 180°$.
3. Toon, met behulp van een figuur, de juistheid aan van de volgende formules:
$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$, α ligt in II;
$sin\ (270° - \alpha) = -\ cos\ \alpha$, α ligt in IV;
$sec\ (-\alpha + 450°) = cosec\ \alpha$, α ligt in III.
4. Vereenvoudig:
$$\frac{tg\ (360° - \alpha)\ tg\ (90° - \alpha)}{cos\ (180° + \alpha)\ sec\ (270° - \alpha)\ cosec\ (90° + \alpha)}.$$
5. Toon aan dat:
$$\left\{\frac{sin\ (270° - \alpha)\ tg\ (90° + \alpha)}{cos\ (\alpha - 180°)\ cotg\ (360° - \alpha)} - \frac{tg\ (-\alpha)}{cotg\ (180° + \alpha)}\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{tg\ (225° - \alpha)}{cotg\ (225° + \alpha)} + \frac{sin\ (\alpha + 180°)}{sec\ (90° - \alpha)}\right\} = 1.$$
(Eindexamen H. B S.).
Opmerking: $tg\ (225° - \alpha)$ en $cotg\ (225° + \alpha)$ kunnen gemakkelijk vergeleken worden met behulp van de cirkel.
6. Als in driehoek ABC, A, B en C de hoeken en a, b en c de overstaande zijden voorstellen, en:
$$\frac{sin\ (90° + A)}{tg\ (270° + A)} \times \frac{cotg\ (180° - A)}{cos\ (360° - A)} + \frac{cos\ (90° - A)}{cotg\ (90° + A)} \times$$

$$\times \frac{1}{sec\ (360° - A)} = \frac{tg\ (225° + B)}{cotg\ (225° - B)} \times \frac{cos\ B}{cosec\ B \times cotg\ B},$$

dan is zijde a = zijde b. Bewijs dit.

(Eindexamen H. B. S.).

7. Herleid tot goniometrische verhoudingen van scherpe hoeken: *sin* 123°; *cos* 217°; *tg* 326°; *cotg* 172°; *sec* 312°; *cosec* 249°; *sin* 290° 17′; *cos* — 312°47′; *tg* 213°29′; *cotg* — 241° 39′ 38″; *sec* 169° 14′42″; *cosec* — 158° 51′8″; *sin* 1000°; *cos* 527°; *tg* — 480°.

8. Bepaal met behulp van de tafels der rechtstreekse waarden: *sin* — 258° 17′ 41″; *cos* 100° 13′ 25″; *tg* 294°42′ 7″; *cotg* — 215°28′ 19″.

9. Bepaal met behulp van de logarithmentafel: *sec* 217°42′ 39″; *cosec* — 118° 52′ (negatieve getallen te behandelen op dezelfde wijze als bij algebraïsche berekeningen).

10. Bepaal de goniometrische verhoudingen van de volgende hoeken, zonder van een tafel gebruik te maken: 120°; 225°; 210°; 300°; — 495°.

11. Bereken met behulp van de logarithmentafel:

a) *sin* 157° 15′ × *cos* 42°47′ × *tg* 213°42′;

b) $$\frac{cos\ 319°16'41'' \times cosec\ 26°12'}{tg\ 143°40'8''};$$

c) $$\frac{cotg\ - 241°25'51''}{sin\ 28°32''\ cos\ 110°52'}.$$

12. Noem alle positieve hoeken, kleiner dan 360°, die voldoen aan de volgende vergelijkingen:
a) $sin\ x = sin\ 20°$; *b*) $cos\ x = cos\ 80°$; *c*) $tg\ x = tg\ 140°$; *d*) $cotg\ x = cotg\ 200°$; *e*) $sec\ x = sec\ 340°$; *f*) $cosec\ x = cosec\ 230°$; *g*) $sin\ 3\ x = sin\ 150°$; *h*) $cos\ 5\ x = cos\ 220°$; *i*) $tg\ \frac{1}{2}\ x = tg\ 15°$; *j*) $cotg\ 2\frac{1}{2}\ x = cotg\ 300°$; *k*) $sec\ 10\ x = sec\ 200°$; *l*) $cosec\ 4\ x = cosec\ 80°$.

13. Bereken de waarde van:

$$\frac{sin\ (a - 180°)\ cos\ (b + 90°)}{cotg\ (270° - c)\ sec\ (- d)},$$

als a, b, c en d scherpe hoeken zijn, waarvan gegeven is: $cos\ a = \frac{3}{5}$, $tg\ b = 2\frac{2}{5}$, $sin\ c = \frac{15}{17}$ en $cotg\ d = \frac{20}{21}$.[1]

---

[1]) Zie 1ste druk bladz. 43 no. 13.

HERHALING.

§ 24. 1. Construeer op een gegeven lijn a als koorde een cirkelsegment, dat een hoek α bevat. Uit de constructie blijkt, dat de straal R door a en α bepaald is. Welke betrekking bestaat er tussen a, α en R? (Let op de rechthoekige driehoek, die bij de constructie ontstaat.)

2. Bereken met behulp van de in no. 1 gevonden betrekking:
a) R, als $a = 5$ en $\alpha = 50°$;
b) a, als $R = 7$ en $\alpha = 20°$;
c) α, als $R = 9$ en $a = 10$.
De oplossing van vraag c) geeft oneindig veel antwoorden voor α. Welke van deze antwoorden hebben betekenis? Controleer dit met behulp van de figuur.

3. Wanneer men om $\triangle$ ABC een cirkel beschrijft, kan men elke zijde en de overstaande hoek beschouwen als een koorde met de daarbij behorende hoek van een cirkelsegment. Schrijf voor de drie zijden en hoeken de betrekking van no. 1 op. Welk verband bestaat er dus tussen de zijden en hoeken van een driehoek?

4. Leid de regel van no. 3 af, door in $\triangle$ ABC de hoogtelijn uit C op twee manieren in de zijden en hoeken uit te drukken. Deze regel draagt de naam van **sinusregel.**

5. Als ABCD een koordenvierhoek is, dan is:
$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$ Bewijs dit.

6. In $\triangle$ ABC trekt men de hoogtelijnen AD, BE en CF, die elkaar in H snijden. Toon aan:
$EF = a \cos A$, $AD = 2R \sin B \sin C$, $AH = a \operatorname{cotg} A = 2R \cos A$, $HD = 2R \cos B \cos C$.
Bewijs, dat uit het antwoord van AH of HD volgt, dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan. Hoe groot zijn nu: FD, BE, BH, HE, DE, CF, CH en HF?

7. Op een stoffelijk punt werken drie krachten K_1, K_2 en K_3, die elkaar opheffen. Bewijs, dat deze krachten zich verhouden

als de sinussen van de overstaande hoeken (de hoek tegenover K_1 is de uitspringende hoek tussen K_2 en K_3).

8. Op een hellend vlak, waarvan de hellingshoek 20° is, ligt een stoffelijk punt van 10 kg gewicht. Hoe groot is de kracht, die men op dit st. p. in de richting van het vlak en loodrecht op de snijlijn van het hellend vlak en een horizontaal vlak, moet laten werken, om te beletten dat het daalt?

9. Bewijs, dat de projectiestelling voor de zijde a van $\triangle$ ABC, zowel voor een scherpe als voor een stompe $\angle$ A, kan geschreven worden in de gedaante:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cdot cos\ A.$$

Men noemt die stelling in deze vorm de **cosinusregel.**

10. Twee krachten K_1 en K_2 hebben hetzelfde aangrijpingspunt, terwijl hun richtingen een hoek α met elkaar maken. Bepaal de grootte van de resultante.

11. Te bewijzen:

$$\frac{tg\ \alpha}{(1 - tg^2\alpha)\ sin^2\alpha} = \frac{tg\ \alpha + cotg\ \alpha}{tg\ \alpha - cotg\ \alpha}\ tg\ (270° + \alpha).$$

12. Herleid:

$$\left\{\frac{1 - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{1 + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha} - \frac{1 + tg^2\alpha}{(1 + tg\alpha)^2}\right\} \times \frac{(cos\ \alpha + sin\ \alpha)^2}{-2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}.$$

13. Bepaal alle waarden van x, die voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{sin\ x + cos\ x}{sin\ x - cos\ x} = 2.$$

14. Eveneens:

$$cotg\ x - tg\ x = 2\sqrt{3}.$$

15. Eveneens:

$$1 - tg^2x + tg^4x - tg^6x + \ldots\ldots = \tfrac{3}{4}\ \text{(oneindig veel termen)}.$$

(Eindexamen Gymnasium).

16. Bewijs de formule:

$$sin\ \frac{180°}{n} = \frac{a_n}{2R},$$

als a_n de zijde van een regelmatige n-hoek, beschreven in een cirkel met straal R, voorstelt.

Bereken vervolgens sin 15° en cos 15° tot in vier decimalen nauwkeurig.

17. Bereken zonder tafel:

$$\frac{tg^3\,105° + tg^3\,15°}{tg^3\,120°}.$$

18. Van een rechthoekige driehoek vormen de zijden een rekenkundige reeks. Bereken de hoeken.

19. Elimineer x uit de beide vergelijkingen:

$$\sin x + \cos x = a$$

$$\text{en } \sin^4 x + \cos^4 x = b.$$

20. Eveneens uit:

$$\sin x + \cos^2 x = a,$$

$$\text{en } \sin x \cos^2 x = b.$$

(Staatsexamen).

De resulterende vergelijking moet rationaal zijn.

21. Maak grafische voorstellingen, in het interval 0° — 360°, van de volgende functies:

a) $y = \sin x + \sin (x + 30°)$; *b*) $y = \sin x + \sin (x + 60°)$;
c) $y = \sin x + \sin (x + 90°)$; *d*) $y = \sin x + \sin (x + 120°)$;
e) $y = \sin x + \sin (x + 150°)$; *f*) $y = \sin x + \sin (x + 180°)$.

22. Eveneens van:

$$y = \sin x + \sin (x + 120°) + \sin (x + 240°).$$

23. Construeer de lijn $p \, tg \, (\alpha - 90°) \sin (\alpha + 270°)$, als p een gegeven lijn en α een gegeven stompe hoek is.


op
school
wat gij bij de hand wilt hebben
in 't gezin
wat gij bij de hand wilt hebben
op kantoor

WOORDENBOEKEN
NIEUWE TALEN

NEDERLANDSCH

M. J. KOENEN-
Dr. J. ENDEPOLS

in één deel, 17e druk f 5,60

FRANSCH

K. R. GALLAS EN
C. R. C. HERCKENRATH

twee deelen . . . à f 3,75

DUITSCH

I. VAN GELDEREN
EN J. H. VAN BECKUM

7e druk

twee deelen . . . à f 3,75

ENGELSCH

K. TEN BRUGGENCATE-
A. BROERS

12e druk

twee deelen . . . à f 3,75

PRIJS PER STEL
ZEVEN DEELEN f 27,–

ELK DEEL AFZONDERLIJK
VERKRIJGBAAR - BIJ DEN
BOEKHANDEL IN VOORRAAD

PERPUSTAKAAN NASIONAL REPUBLIK INDONESIA

Bagian/Seksi : Buku langka No : 89

Pengarang : P. Visser

Judul Buku/Majalah : Leerboek der vlake driehoeksmeting

Tanda Buku : V : 143

Perintah : Jilid / Cover / Portepel / ....

Jakarta, 29 - 11 - 2007

Tanda tangan

(__________)

Nama jelas